Fonctions d'une variable réelle

cours MIP

Soumia CHAIRA et Mohamed MALIKI

Département des Mathématiques
F.S.T. Mohammedia Université Hassan II

1st March 2011

Part I

Continuité d'une fonction réelle

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

Définition

On appelle fonction toute application f définie d'une partie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

1. L'ensemble de définition de f, noté D_f est donné par:
$$D_f = \{x \in \mathbf{R} \,/\, f(x) \text{ est bien définie}\}$$
2. Le graphe de f est la partie de $\mathbf{R}^2$, noté Γ_f est définie par:
$$\Gamma_f = \{(x; f(x)),\ x \in D_f\}$$
3. Un voisinage de $x_0 \in D$ est une partie de $\mathbf{R}$ contenant un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$.

Définition

On appelle fonction toute application f définie d'une partie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

1. L'ensemble de définition de f, noté D_f est donné par:
$$D_f = \{x \in \mathbf{R} \,/\, f(x) \text{ est bien définie}\}$$
2. Le graphe de f est la partie de $\mathbf{R}^2$, noté Γ_f est définie par:
$$\Gamma_f = \{(x; f(x)),\ x \in D_f\}$$
3. Un voisinage de $x_0 \in D$ est une partie de $\mathbf{R}$ contenant un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$.

Définition

On appelle fonction toute application f définie d'une partie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

1. L'ensemble de définition de f, noté D_f est donné par:
$$D_f = \{x \in \mathbf{R} \,/\, f(x) \text{ est bien définie}\}$$
2. Le graphe de f est la partie de $\mathbf{R}^2$, noté Γ_f est définie par:
$$\Gamma_f = \{(x; f(x)),\ x \in D_f\}$$
3. Un voisinage de $x_0 \in D$ est une partie de $\mathbf{R}$ contenant un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$.

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

Parité

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$;

Définition

1. On dit que f est paire si : $\forall x \in \mathbf{R} \quad f(-x) = f(x)$
2. Si f est paire sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. (par exemple $f(x) = x^2$)

Parité

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$;

Définition

1. On dit que f est paire si : $\forall x \in \mathbf{R} \quad f(-x) = f(x)$
2. Si f est paire sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. (par exemple $f(x) = x^2$)

Parité

Définition

1. On dit que f est impaire si : $\forall x \in \mathbf{R} \quad f(-x) = -f(x)$
2. Si f est impaire sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine. (par exemple $f(x) = 1/x$)

Parité

Définition

1. On dit que f est impaire si : $\forall x \in \mathbf{R} \quad f(-x) = -f(x)$
2. Si f est impaire sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine. (par exemple $f(x) = 1/x$)

Périodicité

Définition

1. On dit que f est périodique si : il existe un $T \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x+T) = f(x)$
2. On appelle période de f le plus petit $T \in \mathbf{R}_+^*$ vérifiant la proposition précédente.

Périodicité

Définition

1. On dit que f est périodique si : il existe un $T \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x+T) = f(x)$
2. On appelle période de f le plus petit $T \in \mathbf{R}_+^*$ vérifiant la proposition précédente.

Fonction croissante

Soit f une application de D dans $\mathbf{R}$;

Définition

1. On dit que f est croissante si :

$$\forall x, y \in D \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$$

2. On dit que f est strictement croissante si :

$$\forall x, y \in D \quad (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$$

Fonction croissante

Soit f une application de D dans $\mathbf{R}$;

Définition

1. On dit que f est croissante si :

$$\forall x,\ y \in D \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$$

2. On dit que f est strictement croissante si :

$$\forall x,\ y \in D \quad (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$$

Fonction décroissante

Définition

1. On dit que f est décroissante si :

$$\forall x,\ y \in D \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$$

2. On dit que f est strictement décroissante si :

$$\forall x,\ y \in D \quad (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$$

Fonction décroissante

Définition

1. On dit que f est décroissante si :

$$\forall x,\ y \in D \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$$

2. On dit que f est strictement décroissante si :

$$\forall x,\ y \in D \quad (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$$

Monotonie

Définition

1. On dit que f est monotone sur D si f est croissante ou décroissante sur D
2. On dit que f est strictement monotone sur D si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur D

Monotonie

Définition

1. On dit que f est monotone sur D si f est croissante ou décroissante sur D
2. On dit que f est strictement monotone sur D si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur D

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

Fonction majorée et minorée

Définition

1. On dit que f est majorée sur D si :

$$\exists\, M \in \mathbf{R} \;\; \forall\, x \in D \;\; f(x) \leq M$$

2. On dit que f est minorée sur D si :

$$\exists\, m \in \mathbf{R} \;\; \forall\, x \in D \;\; f(x) \geq m$$

Fonction majorée et minorée

Définition

1. On dit que f est majorée sur D si :

$$\exists\, M \in \mathbf{R} \;\; \forall\, x \in D \;\; f(x) \leq M$$

2. On dit que f est minorée sur D si :

$$\exists\, m \in \mathbf{R} \;\; \forall\, x \in D \;\; f(x) \geq m$$

Fonction bornée

Définition

On dit que f est bornée sur D si elle est à la fois majorée et minorée.

Autrement dit f est bornée si et seulement si

$$\exists K \in \mathbf{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad |f(x)| \leq K$$

Fonction bornée

Définition

On dit que f est bornée sur D si elle est à la fois majorée et minorée.

Autrement dit f est bornée si et seulement si

$$\exists K \in \mathbf{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad |f(x)| \leq K$$

Borne supérieure

Définition

On appelle borne supérieure de f sur D et on note $\sup_{x\in D} f(x)$ la borne supérieure de l'ensemble image de f:

$$\sup_{x\in D} f(x) = \sup\{f(x)/\ x \in D\}$$

Borne inférieure

Définition

On appelle borne inférieure de f sur D et on note $\inf_{x\in D} f(x)$ la borne inférieure de l'ensemble image de f:

$$\inf_{x\in D} f(x) = \inf\{f(x)/\ x \in D\}$$

REMARQUES :

1. La borne supérieure et la borne inférieure de D n'appartiennent pas généralement à $f(D)$.

2. Dans le cas ou elles appartiennent à $f(D)$, on les appelle maximum de f et minimum de f et on note:

$$\sup_{x\in D} f(x) = \max_{x\in D} f(x) \;\; ; \;\; \inf_{x\in D} f(x) = \min_{x\in D} f(x)$$

REMARQUES :

1. La borne supérieure et la borne inférieure de D n'appartiennent pas généralement à $f(D)$.

2. Dans le cas ou elles appartiennent à $f(D)$, on les appelle maximum de f et minimum de f et on note:

$$\sup_{x\in D} f(x) = \max_{x\in D} f(x) \;\; ; \;\; \inf_{x\in D} f(x) = \min_{x\in D} f(x)$$

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

Limite à droite d'un point

Définition

soit $x_0 \in [a, b]$ et f une application définie sur l'intervalle $[a, b]$, sauf peut être en x_0.

On dit que f admet pour limite l à droite au point x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in D \ (0 < x - x_0 \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$

Limite à droite d'un point

Définition

soit $x_0 \in [a, b]$ et f une application définie sur l'intervalle $[a, b]$, sauf peut être en x_0.
On dit que f admet pour limite l à droite au point x_0 si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall\, x \in D \;\; (0 < x - x_0 \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$

Limite à droite d'un point

Définition

soit $x_0 \in [a, b]$ et f une application définie sur l'intervalle $[a, b]$, sauf peut être en x_0.
On dit que f admet pour limite l à droite au point x_0 si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall\, x \in D \;\; (0 < x - x_0 \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

$$\text{On note} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

Limite à gauche d'un point

Définition

On dit que f admet pour limite l à gauche au point x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in D \ (-\alpha < x - x_0 \leq 0 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$

.

Limite à gauche d'un point

Définition

On dit que f admet pour limite l à gauche au point x_0 si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall\, x \in D \;\; (-\alpha < x - x_0 \leq 0 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$

Limite à gauche d'un point

Définition

On dit que f admet pour limite l à gauche au point x_0 si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall\, x \in D \;\; (-\alpha < x - x_0 \leq 0 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

$$\text{On note} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

.

Limite en un point

Définition

soit $x_0 \in [a, b]$ et f une application définie sur l'intervalle $[a, b]$, sauf peut être en x_0.
On dit que f admet pour limite le réel l au point x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in [a, b] \ (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

On note $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Limite en un point

Définition

soit $x_0 \in [a, b]$ et f une application définie sur l'intervalle $[a, b]$, sauf peut être en x_0.
On dit que f admet pour limite le réel l au point x_0 si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall\, x \in [a, b] \;\; (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Limite en un point

Définition

soit $x_0 \in [a, b]$ et f une application définie sur l'intervalle $[a, b]$, sauf peut être en x_0.
On dit que f admet pour limite le réel l au point x_0 si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall\, x \in [a, b] \;\; (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

$$\texttt{On note} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Proposition

f admet une limite l en x_0, si et seulement si

1. *Ses limites à droite et à gauche en x_0 existent ;*
2. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$

Exemple

Calculer la limite à droite et à gauche de $E(x)$ en $a \in \mathbb{N}$.

Proposition

f admet une limite l en x_0, si et seulement si

1. *Ses limites à droite et à gauche en x_0 existent ;*
2. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$

Exemple

Calculer la limite à droite et à gauche de $E(x)$ en $a \in \mathbf{N}$.

Limite infinie en un point

Définition

soit f une application définie sur l'intervalle $[a, b]$.
On dit que f admet pour limite $+\infty$ au point x_0 si

$$\forall A > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in [a, b] \ (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A)$$

$$\text{On note} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Limite infinie en un point

Définition

soit f une application définie sur l'intervalle $[a, b]$.
On dit que f admet pour limite $+\infty$ au point x_0 si

$$\forall A > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in [a, b] \ (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A)$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Limite infinie en un point

Définition

soit f une application définie sur l'intervalle $[a, b]$.
On dit que f admet pour limite $+\infty$ au point x_0 si

$$\forall A > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in [a, b] \ (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A)$$

$$\text{On note} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Limite en $+\infty$

Définition

soit f une application définie sur l'ensemble $]a, +\infty[$.
On dit que f admet pour limite le réel l en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in]a, +\infty[\quad (x \geq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

Limite en $+\infty$

Définition

soit f une application définie sur l'ensemble $]a, +\infty[$.
On dit que f admet pour limite le réel l en $+\infty$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall\, x \in]a, +\infty[\quad (x \geq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

Limite en $+\infty$

Définition

soit f une application définie sur l'ensemble $]a, +\infty[$.
On dit que f admet pour limite le réel l en $+\infty$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall\, x \in]a, +\infty[\quad (x \geq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

$$\text{On note} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Limite infinie en $+\infty$

Définition

soit f une application définie sur l'ensemble $]a, +\infty[$.
On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in]a, +\infty[\quad (x \geq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A)$$

On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Limite infinie en $+\infty$

Définition

soit f une application définie sur l'ensemble $]a, +\infty[$.
On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in]a, +\infty[\quad (x \geq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A)$$

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Limite infinie en $+\infty$

Définition

soit f une application définie sur l'ensemble $]a, +\infty[$.
On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in]a, +\infty[\quad (x \geq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A)$$

$$\text{On note} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Proposition

1. *Si f admet une limite l en x_0 alors elle est unique.*
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.
3. *La réciproque de la proposition précédente est fausse.*
4. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$.

Proposition

1. *Si f admet une limite l en x_0 alors elle est unique.*
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.
3. *La réciproque de la proposition précédente est fausse.*
4. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$.

Proposition

1. *Si f admet une limite l en x_0 alors elle est unique.*
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.
3. *La réciproque de la proposition précédente est fausse.*
4. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$.

Proposition

1. *Si f admet une limite l en x_0 alors elle est unique.*
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.
3. *La réciproque de la proposition précédente est fausse.*
4. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$.

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

Caractéristion de la limite au moyen des suites

Proposition

f admet une limite l en x_0 *si et seulement si*

$$\text{pour toute suite } (u_n) \text{ telle que } \lim_{n\to+\infty}(u_n) = x_0$$

$$\text{on a } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l.$$

Caractéristion de la limite au moyen des suites

Proposition

f admet une limite l en x_0 si et seulement si

$$\text{pour toute suite } (u_n) \text{ telle que } \lim_{n\to+\infty}(u_n) = x_0$$

$$\text{on a } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l.$$

On peut montrer à l'aide de la proposition précédente qu'une fonction n'admet pas de limite en x_0

Exemple

$f(x) = \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

Proposition

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I non réduit à un point, et $x_0 \in I$, alors

1. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existe* $\Rightarrow$ f *est borné sur un voisinage de* x_0 ;
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ *et* g *bornée près de* $x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Proposition

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I non réduit à un point, et $x_0 \in I$, alors

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *existe* $\Rightarrow$ f *est borné sur un voisinage de* x_0 ;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ *et* g *bornée près de* $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Proposition

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I non réduit à un point, et $x_0 \in I$, alors

1. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existe* $\Rightarrow$ f *est borné sur un voisinage de* x_0 ;
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ *et* g *bornée près de* $x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

encadrement

Proposition

soient f, g_1 et g_2 des applications définies sur un intervalle $[a,b]$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$
Si f, g_1 et g_2 admettent des limites en x_0 alors

$$\lim_{x \to x_0} g_1(x) \leq \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g_2(x)$$

Si de plus

$$\lim_{x \to x_0} g_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_2(x) = l$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

encadrement

Proposition

soient f, g_1 et g_2 des applications définies sur un intervalle $[a,b]$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$
Si f, g_1 et g_2 admettent des limites en x_0 alors

$$\lim_{x \to x_0} g_1(x) \leq \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g_2(x)$$

Si de plus

$$\lim_{x \to x_0} g_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_2(x) = l$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

encadrement

Proposition

soient f, g_1 et g_2 des applications définies sur un intervalle $[a,b]$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$
Si f, g_1 et g_2 admettent des limites en x_0 alors

$$\lim_{x \to x_0} g_1(x) \leq \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g_2(x)$$

Si de plus

$$\lim_{x \to x_0} g_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_2(x) = l$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

On peut calculer à l'aide de la proposition précédente la limite d'une fonction en x_0

Exemple

1. Limite de $f(x) = x \sin(1/x)$ en 0 ?
2. Limite de $f(x) = \sin(x)/x$ en $+\infty$?

On peut calculer à l'aide de la proposition précédente la limite d'une fonction en x_0

Exemple

1. Limite de $f(x) = x\sin(1/x)$ en 0 ?
2. Limite de $f(x) = \sin(x)/x$ en $+\infty$?

Théorème

soit f une application définie sur un intervalle $[a, b]$ contenant x_0, telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Si $f(x) \geq 0$ dans un voisinage de x_0 alors $l \geq 0$

Théorème

soit f une application définie sur un intervalle $[a, b]$ contenant x_0, telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Si $f(x) \geq 0$ dans un voisinage de x_0 alors $l \geq 0$

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

Fonctions équivalentes

Définition

On dit que f et g sont des fonctions équivalentes en x_0 s'il existe un voisinage de x_0 dans I et une fonction u définie sur $V - \{x_0\}$ telle que :

1. $\lim_{x \to x_0} u(x) = 1$;
2. $f(x) = g(x)u(x)$.

On note habituellement $f(x) \sim g(x)$ en x_0

Fonctions équivalentes

Définition

On dit que f et g sont des fonctions équivalentes en x_0 s'il existe un voisinage de x_0 dans I et une fonction u définie sur $V - \{x_0\}$ telle que :

1. $\lim_{x \to x_0} u(x) = 1$;
2. $f(x) = g(x)u(x)$.

On note habituellement $f(x) \sim g(x)$ en x_0

Fonctions équivalentes

Définition

On dit que f et g sont des fonctions équivalentes en x_0 s'il existe un voisinage de x_0 dans I et une fonction u définie sur $V - \{x_0\}$ telle que :

1. $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 1$;
2. $f(x) = g(x)u(x)$.

On note habituellement $f(x) \sim g(x)$ en x_0

Exemples de référence

Exemple

- $x \sim \sin x \ \ en \ \ 0$;
- $e^x - 1 \sim x \ \ en \ \ 0$;
- $\ln(1+x) \sim x \ \ en \ \ 0$;
- $\forall \alpha \in \mathbf{R}^*; \ \ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ \ en \ \ 0.$

Exemples de référence

Exemple

- $x \sim \sin x \ \ en \ \ 0$;
- $e^x - 1 \sim x \ \ en \ \ 0$;
- $\ln(1+x) \sim x \ \ en \ \ 0$;
- $\forall \alpha \in \mathbf{R}^*; \ \ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ \ en \ \ 0.$

Exemples de référence

Exemple

- $x \sim \sin x \ \ en \ \ 0$;
- $e^x - 1 \sim x \ \ en \ \ 0$;
- $\ln(1+x) \sim x \ \ en \ \ 0$;
- $\forall \alpha \in \mathbf{R}^*; \ \ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ \ en \ \ 0.$

Exemples de référence

Exemple

- $x \sim \sin x \ \ en \ \ 0$;
- $e^x - 1 \sim x \ \ en \ \ 0$;
- $\ln(1+x) \sim x \ \ en \ \ 0$;
- $\forall \alpha \in \mathbf{R}^*; \ \ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ \ en \ \ 0.$

Exemple

Trouver les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} e^{1/x}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}$.

Exemple

Trouver les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} e^{1/x}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}$.

Fonction négligeable

Définition

On dit que f est négligeable devant g en x_0 s'il existe un voisinage de x_0 dans I et une fonction ε définie sur $V - \{x_0\}$ telle que :

1. $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$
2. $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

On note habituellement $f(x) = O(g(x))$ en x_0

Fonction négligeable

Définition

On dit que f est négligeable devant g en x_0 s'il existe un voisinage de x_0 dans I et une fonction ε définie sur $V - \{x_0\}$ telle que :

1. $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$
2. $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

On note habituellement $f(x) = O(g(x))$ en x_0

Fonction négligeable

Définition

On dit que f est négligeable devant g en x_0 s'il existe un voisinage de x_0 dans I et une fonction ε définie sur $V - \{x_0\}$ telle que :

1. $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$
2. $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

On note habituellement $f(x) = O(g(x))$ en x_0

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

soient f, g des applications définie sur un intervalle $[a, b]$ contenant x_0 tels que f, g admettent des limites l et l' respectives en x_0 alors :

Proposition

1. *Pour tout* $\lambda \in \mathbf{R}$ *on a* $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = l + l'.$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x) = l.l'.$
4. *Si de plus* $l' \neq 0$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} (f/g)(x) = l/l'.$

Proposition

1. *Pour tout* $\lambda \in \mathbf{R}$ *on a* $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = l + l'.$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x) = l.l'.$
4. *Si de plus* $l' \neq 0$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} (f/g)(x) = l/l'.$

Proposition

1. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a* $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = l + l'.$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x) = l.l'.$
4. *Si de plus* $l' \neq 0$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} (f/g)(x) = l/l'.$

Proposition

1. *Pour tout* $\lambda \in \mathbf{R}$ *on a* $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = l + l'.$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x) = l.l'.$
4. *Si de plus* $l' \neq 0$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} (f/g)(x) = l/l'.$

Remarque :

A ne pas oublier, que chaque fois qu'on a $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$, c'est une forme indéterminée. Il faut utiliser les méthodes de calcul adéquates pour lever l'indétermination.

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

Exemple

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$;
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2$.

Exemple

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$;
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2$.

Exemple

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$;
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2$.

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, f une application de I dans $\mathbf{R}$. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On dit que f est continue en x_0 si : f est définie en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

On dit que f est discontinue en x_0 si f n'est pas continue en x_0

Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, f une application de I dans $\mathbf{R}$. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On dit que f est continue en x_0 si : f est définie en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

On dit que f est discontinue en x_0 si f n'est pas continue en x_0

Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, f une application de I dans $\mathbf{R}$. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On dit que f est continue en x_0 si : f est définie en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

On dit que f est discontinue en x_0 si f n'est pas continue en x_0

Continuité à gauche d'un point

Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, f une application de I dans $\mathbf{R}$.
Soit $x_0 \in \mathbf{R}$.
On dit que f est continue à gauche en x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Continuité à droite d'un point

Définition

On dit que f est continue à droite en x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Proposition

Si f est continue à droite et à gauche en x_0 alors elle est continue en x_0.

Exemple

1. La fonction $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ n'est pas continue en 0.

Exemple

1. La fonction $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ n'est pas continue en 0.

Théorème

Soit f une application définie sur I et $x_0 \in \boldsymbol{R}$.
f est continue en x_0 sssi l'une des assertions suivantes est vérifiée :

1. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in I\ \ (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
2. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V_{x_0}$ *voisinage de* x_0 *tel que*

$$\forall\, x \in V_{x_0} \cap I\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

3. $\forall\, (u_n)_n \subset I$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$ *on a*

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(x_0)$$

Théorème

Soit f une application définie sur I et $x_0 \in \mathbf{R}$.
f est continue en x_0 sssi l'une des assertions suivantes est vérifiée :

1. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in I\ \ (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
2. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V_{x_0}$ *voisinage de* x_0 *tel que*

$$\forall\, x \in V_{x_0} \cap I\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

3. $\forall\, (u_n)_n \subset I$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$ *on a*

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(x_0)$$

Théorème

Soit f une application définie sur I et $x_0 \in \mathbb{R}$.
f est continue en x_0 sssi l'une des assertions suivantes est vérifiée :

1. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in I\ \ (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
2. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V_{x_0}$ *voisinage de* x_0 *tel que*

$$\forall\, x \in V_{x_0} \cap I\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

3. $\forall\, (u_n)_n \subset I$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$ *on a*

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(x_0)$$

Continuité d'une fonction

Définition

On dit que f est continue sur $[a, b]$ si f est continue en tout point de $]a, b[$ et elle est continue à droite en a et à gauche en b.

Proposition

Si f est continue en x_0 alors f est bornée au voisinage de x_0.

Continuité d'une fonction

Définition

On dit que f est continue sur $[a, b]$ si f est continue en tout point de $]a, b[$ et elle est continue à droite en a et à gauche en b.

Proposition

Si f est continue en x_0 alors f est bornée au voisinage de x_0.

Exemple

Les fonctions polynômiales, sinusoïdales, exponentielles, logarithmeiques et fractionnelles sont continues sur leurs domaines de définition.

Proposition

Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ alors f ne s'annule pas dans un voisinage de x_0.

Prolongement par continuité

Définition

Soit f une application définie sur l'ensemble $]a,b[-\{x_0\}$. admettant une limite l en x_0. On définit l'application:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \texttt{Si } x \in]a,b[-\{x_0\} \\ l & \texttt{Si } x = x_0 \end{cases}$$

$\widetilde{f}$ est dit prolongement par continuité de f au point x_0.

Prolongement par continuité

Définition

Soit f une application définie sur l'ensemble $]a,b[-\{x_0\}$. admettant une limite l en x_0. On définit l'application:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \texttt{Si } x \in]a,b[-\{x_0\} \\ l & \texttt{Si } x = x_0 \end{cases}$$

$\widetilde{f}$ est dit prolongement par continuité de f au point x_0.

Exemple

Montrer que la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

est prolongeable par continuité.

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in I$ (resp. sur I) et λ un nombre réel. Alors

1. $f+g$, λf, $|f|$, $f \times g$ *sont continues en x_0 (resp. sur I).*
2. *Si en outre f ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{f}$ est continue en x_0 (resp. sur I).*

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in I$ (resp. sur I) et λ un nombre réel. Alors

1. $f+g$, λf, $|f|$, $f \times g$ *sont continues en x_0 (resp. sur I).*
2. *Si en outre f ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{f}$ est continue en x_0 (resp. sur I).*

Proposition

Soit f une fonction continue en x_0 (resp. sur I) et g une fonction continue en $f(x_0)$ (resp. sur $J \supset f(I)$) alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0 (resp. sur I).

Exemple

1. La fonction $x \longrightarrow xe^x$ est continue sur $\mathbf{R}$;
2. La fonction $x \longrightarrow \sqrt{3x-1}$ est continue sur $[1,5]$;
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x} & si \quad x > 0 \\ 1+x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$ est continue sur R ;

Exemple

1. La fonction $x \longrightarrow xe^x$ est continue sur $\mathbf{R}$;
2. La fonction $x \longrightarrow \sqrt{3x-1}$ est continue sur $[1,5]$;
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x} & si \quad x > 0 \\ 1+x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$ est continue sur R ;

Exemple

1. La fonction $x \longrightarrow xe^x$ est continue sur $\mathbf{R}$;
2. La fonction $x \longrightarrow \sqrt{3x-1}$ est continue sur $[1,5]$;
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x} & si \quad x > 0 \\ 1+x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbf{R}$;

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

Extrema d'une fonction continue sur un segment

Théorème

Toute fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Enoncé 1.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Enoncé 2.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de R.
Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Alors :
$\forall\, y \in [f(a), f(b)] (ou [f(b), f(a)]), \exists\, c \in [a, b]$ *tel que* $f(c) = y$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Enoncé 1.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Enoncé 2.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.
Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Alors :
$\forall\, y \in [f(a), f(b)] (ou [f(b), f(a)]),\ \exists\, c \in [a, b]$ *tel que* $f(c) = y$.

Corollaire

Si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a)f(b) < 0$, alors

$$\exists\, c \in [a,b] \;\; / \;\; f(c) = 0.$$

Ce corollaire permet donc d'obtenir l'existence de solutions d'équation de type $f(x) = 0$.

ATTENTION.

Il n'y a pas forcément unicité de la solution. (Ne pas confondre le théorème des valeurs intermédiaires avec le théorème de la bijection vu en terminale, et qui exige la stricte monotonie).

Plan

1. Fonction définie de R dans R
   - Définitions
   - Monotonie, parité et périodicité
   - Applications bornées
2. Limites
   - Limite à droite
   - Caractéristion de la limite au moyen des suites
   - Encadrement
   - Comparaison
   - Opérations algébriques sur les limites
   - Limites usuelles
3. Continuité
   - Définition et premières propriétés
   - Opérations sur les fonctions continues

Théorème du point fixe

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et à valeurs dans $[a,b]$.
Alors il existe un c dans $[a,b]$ tel que $f(c)=c$.
c est appelé point fixe de f.

Exemple

Montrer que l'équation $1 + \sin x - x^2 = 0$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$

Fonction bijective

Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors

1. *f est une bijection de I sur $f(I)$.*
2. *$f^{-1} : f(I) \to I$ possède la même monotonie que f.*
3. *f^{-1} est continue sur $f(I)$.*

Fonction bijective

Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors

1. *f est une bijection de I sur $f(I)$.*
2. *$f^{-1} : f(I) \to I$ possède la même monotonie que f.*
3. *f^{-1} est continue sur $f(I)$.*

Fonction bijective

Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors

1. *f est une bijection de I sur $f(I)$.*
2. *$f^{-1} : f(I) \to I$ possède la même monotonie que f.*
3. *f^{-1} est continue sur $f(I)$.*

Part II

Dérivabilité d'une fonction réelle

Plan

5 Dérivée d'une fonction réelle
- Définition et Propriétés
- Dérivée et continuité
- Opérations sur les Dérivées
- Dérivées successives

6 Théorème de Rolle
- Maximum et minimum
- Théorème des accroissements finis
- Applications du Théorème des accroissements finis

Dérivée d'une fonction réelle

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$.

1. On dit que f est dérivable en x_0 si la quantité

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite lorsque h tend vers 0.
On note cette limite $f'(x_0)$ et est appelée la dérivée en x_0

2. On dit que f est dérivable sur un intervalle $J \subset I$ si elle est dérivable en tout point de J.
3. On appelle alors la fonction dérivée de f et on note $f'(x)$

Dérivée d'une fonction réelle

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$.

1. On dit que f est dérivable en x_0 si la quantité

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite lorsque h tend vers 0.
On note cette limite $f'(x_0)$ et est appelée la dérivée en x_0

2. On dit que f est dérivable sur un intervalle $J \subset I$ si elle est dérivable en tout point de J.
3. On appelle alors la fonction dérivée de f et on note $f'(x)$

Dérivée d'une fonction réelle

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$.

1. On dit que f est dérivable en x_0 si la quantité

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite lorsque h tend vers 0.
On note cette limite $f'(x_0)$ et est appelée la dérivée en x_0

2. On dit que f est dérivable sur un intervalle $J \subset I$ si elle est dérivable en tout point de J.
3. On appelle alors la fonction dérivée de f et on note $f'(x)$

Dérivée d'une fonction réelle

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$.

1. On dit que f est dérivable en x_0 si la quantité

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite lorsque h tend vers 0.
On note cette limite $f'(x_0)$ et est appelée la dérivée en x_0

2. On dit que f est dérivable sur un intervalle $J \subset I$ si elle est dérivable en tout point de J.
3. On appelle alors la fonction dérivée de f et on note $f'(x)$

Exemple

1. La dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$.
2. La dérivée de $f(x) = \cos(x)$ est $f'(x) = -\sin(x)$.
3. La fonction définie sur R par:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur R, mais pas dérivable en 0.

Exemple

1. La dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$.
2. La dérivée de $f(x) = \cos(x)$ est $f'(x) = -\sin(x)$.
3. La fonction définie sur R par:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur R, mais pas dérivable en 0.

Exemple

1. La dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$.
2. La dérivée de $f(x) = \cos(x)$ est $f'(x) = -\sin(x)$.
3. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas dérivable en 0.

Exemple

1. La dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$.
2. La dérivée de $f(x) = \cos(x)$ est $f'(x) = -\sin(x)$.
3. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas dérivable en 0.

Exemple

1. La dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$.
2. La dérivée de $f(x) = \cos(x)$ est $f'(x) = -\sin(x)$.
3. La fonction définie sur **R** par:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \texttt{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \texttt{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est continue sur R, mais pas dérivable en 0.

Exemple

1. La dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$.
2. La dérivée de $f(x) = \cos(x)$ est $f'(x) = -\sin(x)$.
3. La fonction définie sur $\mathbf{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \texttt{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \texttt{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbf{R}$, mais pas dérivable en 0.

Remarques

1. On a aussi
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
2. La tangente à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
3. Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la normale à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :
$$y = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarques

1. On a aussi
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
2. La tangente à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
3. Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la normale à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :
$$y = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarques

1. On a aussi
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
2. La tangente à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
3. Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la normale à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :
$$y = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarques

1. On a aussi
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. La tangente à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

3. Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la normale à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :
$$y = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarques

1. On a aussi
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. La tangente à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

3. Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la normale à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :
$$y = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Définition

Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$.

1. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

est finie.
On note cette limite $f'_d(x_0)$ et est appelée la dérivée à droite en x_0.

Définition

Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$.

1. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

est finie.

On note cette limite $f'_d(x_0)$ et est appelée la dérivée à droite en x_0.

Définition

Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$.

1. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

est finie.
On note cette limite $f'_d(x_0)$ et est appelée la dérivée à droite en x_0.

Définition

Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$.

1. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

est finie.
On note cette limite $f'_d(x_0)$ et est appelée la dérivée à droite en x_0.

Définition

Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$.

1. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la quantité

$$\lim_{h \to 0^-} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie. On note cette limite $f'_g(x_0)$ et appelée la dérivée à gauche en x_0.

2. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0.

Définition

Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$.

1. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la quantité

$$\lim_{h \to 0^-} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie. On note cette limite $f'_g(x_0)$ et appelée la dérivée à gauche en x_0.

2. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0.

Définition

Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$.

1. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la quantité

$$\lim_{h \to 0^-} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie. On note cette limite $f'_g(x_0)$ et appelée la dérivée à gauche en x_0.

2. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0.

Exemple

1. $f(x) = |x| \quad f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.
2. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^3 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

n'est pas dérivable en 1.

Exemple

1. $f(x) = |x| \quad f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.
2. La fonction définie sur **R** par:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^3 - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

n'est pas dérivable en 1.

Exemple

1. $f(x) = |x| \quad f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.
2. La fonction définie sur **R** par:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \texttt{si} \quad x < 1 \\ x^3 - 1 & \texttt{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

n'est pas dérivable en 1.

Remarque

1. Si
$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$$
alors la courbe de f possède une demi tangente verticale au point $(x_0, f(x_0))$.
2. Si
$$f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$$
alors la courbe de f présente un point anguleux au point $(x_0, f(x_0))$.

Remarque

1. Si
$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$$
alors la courbe de f possède une demi tangente verticale au point $(x_0, f(x_0))$.
2. Si
$$f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$$
alors la courbe de f présente un point anguleux au point $(x_0, f(x_0))$.

Remarque

1. Si
$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$$
alors la courbe de f possède une demi tangente verticale au point $(x_0, f(x_0))$.
2. Si
$$f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$$
alors la courbe de f présente un point anguleux au point $(x_0, f(x_0))$.

Remarque

1. Si
$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$$
alors la courbe de f possède une demi tangente verticale au point $(x_0, f(x_0))$.
2. Si
$$f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$$
alors la courbe de f présente un point anguleux au point $(x_0, f(x_0))$.

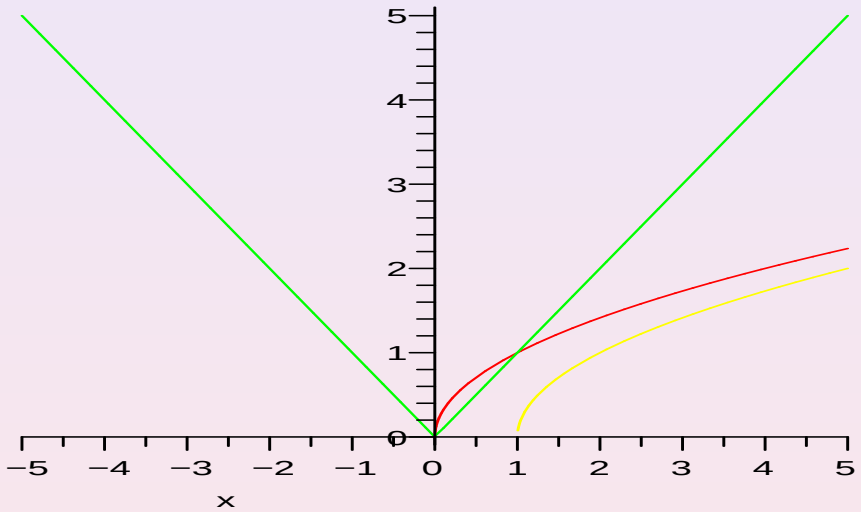

Figure: demi tangente

Plan

5 Dérivée d'une fonction réelle
- Définition et Propriétés
- Dérivée et continuité
- Opérations sur les Dérivées
- Dérivées successives

6 Théorème de Rolle
- Maximum et minimum
- Théorème des accroissements finis
- Applications du Théorème des accroissements finis

Proposition

Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$.

1. *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
2. *Si f est dérivable en x_0 alors:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Proposition

Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$.

1. *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
2. *Si f est dérivable en x_0 alors:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Proposition

Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$.

1. *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
2. *Si f est dérivable en x_0 alors:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

ATTENTION

La réciproque de la proposition précédente n'est pas vrai :
Si f est continue cela n'implique pas que f est dérivable.
Une fonction peut être continue partout sans être dérivable nulle part.

Plan

5 Dérivée d'une fonction réelle
- Définition et Propriétés
- Dérivée et continuité
- Opérations sur les Dérivées
- Dérivées successives

6 Théorème de Rolle
- Maximum et minimum
- Théorème des accroissements finis
- Applications du Théorème des accroissements finis

Proposition

Soit f, g deux fonctions définies et dérivables sur $I =]a, b[$.

1. $f + g$ *est dérivable en* x *et* $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. λf *est dérivable en* x *et* $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$
3. $f.g$ *est dérivable en* x *et* $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
4. *Si* $g(x) \neq 0$ *alors* $\frac{f}{g}$ *est dérivable en* x *et*

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}$$

Proposition

Soit f, g deux fonctions définies et dérivables sur $I =]a, b[$.

1. *$f + g$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$*
2. *λf est dérivable en x et $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$*
3. *$f.g$ est dérivable en x et $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$*
4. *Si $g(x) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et*

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}$$

Proposition

Soit f, g deux fonctions définies et dérivables sur $I =]a, b[$.

1. *$f + g$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$*
2. *λf est dérivable en x et $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$*
3. *$f.g$ est dérivable en x et $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$*
4. *Si $g(x) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et*

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}$$

Proposition

Soit f, g deux fonctions définies et dérivables sur $I =]a, b[$.

1. $f + g$ *est dérivable en* x *et* $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. λf *est dérivable en* x *et* $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$
3. $f.g$ *est dérivable en* x *et* $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
4. *Si* $g(x) \neq 0$ *alors* $\frac{f}{g}$ *est dérivable en* x *et*

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}$$

Proposition

Soit f, g deux fonctions définies et dérivables sur $I =]a, b[$.

1. *$f + g$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$*
2. *λf est dérivable en x et $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$*
3. *$f.g$ est dérivable en x et $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$*
4. *Si $g(x) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et*

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}$$

Proposition

Soit f une fonction définie et dérivable sur $I =]a, b[$.
Soit g une fonction définie et dérivable sur J tel que $f(I) \subset J$.
Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

Proposition

Soit f une fonction définie et dérivable sur $I =]a, b[$.
Soit g une fonction définie et dérivable sur J tel que $f(I) \subset J$.
Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

Proposition

Soit f une fonction définie et dérivable sur $I =]a, b[$.
Soit g une fonction définie et dérivable sur J tel que $f(I) \subset J$.
Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

Proposition

Soit f une fonction définie et dérivable sur $I =]a, b[$.
Soit g une fonction définie et dérivable sur J tel que $f(I) \subset J$.
Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\frac{-1}{\cos^2(x)}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Exemple

1. Calculer la dérivée de $f(x) = \arcsin(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x})$
2. Calculer la dérivée de $f(x) = ln(\frac{1-x^2}{x^2})$

Exemple

1. Calculer la dérivée de $f(x) = \arcsin(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x})$
2. Calculer la dérivée de $f(x) = ln(\frac{1-x^2}{x^2})$

ATTENTION

On n' a pas nécessairement

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

Et on ne peut conclure la non dérivabilité de cette manière. Pour s'en convaincre, on considère l'exemple:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \texttt{si } x \neq 0 \\ 0 & \texttt{si } x = 0 \end{cases}$$

Plan

5 Dérivée d'une fonction réelle
- Définition et Propriétés
- Dérivée et continuité
- Opérations sur les Dérivées
- Dérivées successives

6 Théorème de Rolle
- Maximum et minimum
- Théorème des accroissements finis
- Applications du Théorème des accroissements finis

Soit f une application définie sur un intervalle ouvert I.

Définition

1. Si l' application dérivée de f et f' est à son tour dérivable sur I, on note f'' sa dérivée qui est appelée la dérivée seconde.
2. On peut ainsi définir de proche en proche pour tout entier n la dérivée nième (ou d'ordre n) de f que l'on note $f^{(n)}$.
3. On dit que f est indéfiniment dérivable si $f^{(n)}$ existe pour tout $n \in N$.

Soit f une application définie sur un intervalle ouvert I.

Définition

1. Si l' application dérivée de f et f' est à son tour dérivable sur I, on note f'' sa dérivée qui est appelée la dérivée seconde.
2. On peut ainsi définir de proche en proche pour tout entier n la dérivée nième (ou d'ordre n) de f que l'on note $f^{(n)}$.
3. On dit que f est indéfiniment dérivable si $f^{(n)}$ existe pour tout $n \in N$.

Soit f une application définie sur un intervalle ouvert I.

Définition

1. Si l' application dérivée de f et f' est à son tour dérivable sur I, on note f'' sa dérivée qui est appelée la dérivée seconde.
2. On peut ainsi définir de proche en proche pour tout entier n la dérivée nième (ou d'ordre n) de f que l'on note $f^{(n)}$.
3. On dit que f est indéfiniment dérivable si $f^{(n)}$ existe pour tout $n \in N$.

ATTENTION

Les domaine de définition de f, f', ... $f^{(n)}$ sont en général différents.

$$f(x) = \ln(x)$$

$$g(x) = x^{3/2}$$

Exemple

1. La dérivée n ième de la fonction $f(x) = \cos(x)$ est $\cos(x + n\frac{\pi}{2})$
2. La dérivée n ième de la fonction $f(x) = \sin(x)$ est $\sin(x + n\frac{\pi}{2})$
3. La dérivée n ième de la fonction $f(x) = x^p$ est

$$\begin{cases} 0 & \text{si } n > p \\ n! & \text{si } n = p \\ \dfrac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} & \text{si } n < p \end{cases}$$

Exemple

1. La dérivée n ième de la fonction $f(x) = \cos(x)$ est $\cos(x + n\frac{\pi}{2})$
2. La dérivée n ième de la fonction $f(x) = \sin(x)$ est $\sin(x + n\frac{\pi}{2})$
3. La dérivée n ième de la fonction $f(x) = x^p$ est

$$\begin{cases} 0 & \text{si } n > p \\ n! & \text{si } n = p \\ \dfrac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} & \text{si } n < p \end{cases}$$

Exemple

1. La dérivée n ième de la fonction $f(x) = \cos(x)$ est $\cos(x + n\frac{\pi}{2})$
2. La dérivée n ième de la fonction $f(x) = \sin(x)$ est $\sin(x + n\frac{\pi}{2})$
3. La dérivée n ième de la fonction $f(x) = x^p$ est

$$\begin{cases} 0 & \text{si } n > p \\ n! & \text{si } n = p \\ \dfrac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} & \text{si } n < p \end{cases}$$

Proposition

Soient f et g deux applications admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

1. $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$.
2. $(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$.

Proposition

Soient f et g deux applications admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

1. $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$.
2. $(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$.

Formule de Leibniz

Proposition

Soient f et g deux applications admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
$(f.g)^{(n)}(x_0)$ existe et on a la formule de Leibniz :

$$(f.g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$$

Fonction de classe C^n

Définition

1. On dit que f est de classe C^n sur l'intervalle I si f est dérivable jusqu'à l'ordre n sur I et si $f^{(n)}$ est continue.
2. On note C^n l'ensemble des fonctions de classe C^n.
3. l'application f est de classe C^∞ sur l'intervalle I si f est indéfiniment dérivable.
4. On note C^∞ l'ensemble des fonctions de classe C^∞.

Fonction de classe C^n

Définition

1. On dit que f est de classe C^n sur l'intervalle I si f est dérivable jusqu'à l'ordre n sur I et si $f^{(n)}$ est continue.
2. On note C^n l'ensemble des fonctions de classe C^n.
3. l'application f est de classe C^∞ sur l'intervalle I si f est indéfiniment dérivable.
4. On note C^∞ l'ensemble des fonctions de classe C^∞.

Fonction de classe C^n

Définition

1. On dit que f est de classe C^n sur l'intervalle I si f est dérivable jusqu'à l'ordre n sur I et si $f^{(n)}$ est continue.
2. On note C^n l'ensemble des fonctions de classe C^n.
3. l'application f est de classe C^∞ sur l'intervalle I si f est indéfiniment dérivable.
4. On note C^∞ l'ensemble des fonctions de classe C^∞.

Fonction de classe C^n

Définition

1. On dit que f est de classe C^n sur l'intervalle I si f est dérivable jusqu'à l'ordre n sur I et si $f^{(n)}$ est continue.
2. On note C^n l'ensemble des fonctions de classe C^n.
3. l'application f est de classe C^∞ sur l'intervalle I si f est indéfiniment dérivable.
4. On note C^∞ l'ensemble des fonctions de classe C^∞.

Fonction de classe C^n

Définition

1. On dit que f est de classe C^n sur l'intervalle I si f est dérivable jusqu'à l'ordre n sur I et si $f^{(n)}$ est continue.
2. On note C^n l'ensemble des fonctions de classe C^n.
3. l'application f est de classe C^∞ sur l'intervalle I si f est indéfiniment dérivable.
4. On note C^∞ l'ensemble des fonctions de classe C^∞.

Plan

5 Dérivée d'une fonction réelle
- Définition et Propriétés
- Dérivée et continuité
- Opérations sur les Dérivées
- Dérivées successives

6 Théorème de Rolle
- Maximum et minimum
- Théorème des accroissements finis
- Applications du Théorème des accroissements finis

Minimum local et global

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

1. x_0 est dit un minimum local (relatif) de f si il existe $J =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$ tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in J$.
2. x_0 est dit un minimum global (absolu) de f si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in I$.

Minimum local et global

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

1. x_0 est dit un minimum local (relatif) de f si il existe $J =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$ tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in J$.
2. x_0 est dit un minimum global (absolu) de f si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in I$.

Minimum local et global

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

1. x_0 est dit un minimum local (relatif) de f si il existe $J =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$ tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in J$.
2. x_0 est dit un minimum global (absolu) de f si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in I$.

Théorème de Rolle

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$*
3. *$f(a) = f(b)$,*

alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème de Rolle

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$*
3. *$f(a) = f(b)$,*

alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème de Rolle

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$*
3. *$f(a) = f(b)$,*

alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème de Rolle

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$*
3. *$f(a) = f(b)$,*

alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème de Rolle

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$*
3. *$f(a) = f(b)$,*

alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Plan

5 Dérivée d'une fonction réelle
- Définition et Propriétés
- Dérivée et continuité
- Opérations sur les Dérivées
- Dérivées successives

6 Théorème de Rolle
- Maximum et minimum
- Théorème des accroissements finis
- Applications du Théorème des accroissements finis

Théorème des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*

alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Théorème des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*

alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Théorème des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*

alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Théorème des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*

alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Théorème des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*

alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Plan

5 Dérivée d'une fonction réelle
- Définition et Propriétés
- Dérivée et continuité
- Opérations sur les Dérivées
- Dérivées successives

6 Théorème de Rolle
- Maximum et minimum
- Théorème des accroissements finis
- Applications du Théorème des accroissements finis

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*
3. *f' nulle sur $]a, b[$,*

alors f est constante sur $]a, b[$.

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*
3. *f' nulle sur $]a, b[$,*

alors f est constante sur $]a, b[$.

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*
3. *f' nulle sur $]a, b[$,*

alors f est constante sur $]a, b[$.

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*
3. *f' nulle sur $]a, b[$,*

alors f est constante sur $]a, b[$.

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*
3. *f' nulle sur $]a, b[$,*

alors f est constante sur $]a, b[$.

Contre exemple

Soit $I =]0,1[\cup]1,2[$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur }]0,1[\\ 2 & \text{sur }]1,2[\end{cases}$$

$f' = 0$ sur I n'entraine pas f constante sur I

La condition que I un intervalle est obligatoire.

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$.

1. *$f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors f est croissante sur $]a, b[$.*
2. *$f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors f est décroissante sur $]a, b[$.*

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$.

1. *$f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors f est croissante sur $]a, b[$.*
2. *$f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors f est décroissante sur $]a, b[$.*

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$.

1. $f'(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in]a, b[$ *alors* f *est croissante sur* $]a, b[$.
2. $f'(x) \leq 0$ *pour tout* $x \in]a, b[$ *alors* f *est décroissante sur* $]a, b[$.

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a,b[$, $x_0 \in]a,b[$

1. *Si x_0 est un extrémum local de f alors $f'(x_0) = 0$.*
2. *Si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0 alors x_0 est un extrémum local de f.*

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a,b[$, $x_0 \in]a,b[$

1. *Si x_0 est un extrémum local de f alors $f'(x_0) = 0$.*
2. *Si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0 alors x_0 est un extrémum local de f.*

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a,b[$, $x_0 \in]a,b[$

1. *Si x_0 est un extrémum local de f alors $f'(x_0) = 0$.*
2. *Si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0 alors x_0 est un extrémum local de f.*